Chapitre 31

Matrices et applications linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie** non nulle.
On notera $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $p = \dim F \in \mathbb{N}^*$.

1 Matrice associée à un morphisme

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition 31.1 – Matrice d'un vecteur

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit x un vecteur de E. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne notée

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

avec $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Exemple 1. Donner la matrice du vecteur $x = (2,3,4) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$.

Exemple 2. (On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$). Donner la matrice du polynôme $P = X^2$ dans la base $\mathcal{B} = \left(1, X+1, X^2+1\right)$.

Exemple 3. Si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Remarque (Identification $\mathbb{K}^n$–$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)**.** Les ensembles $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes : on *identifie* alors $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ peut donc s'écrire de deux manières :

$$(x_1, \cdots, x_n) \overset{\text{id.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x))$$

La relation $x \overset{\text{id.}}{=} \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x)$ n'est vraie que pour la base canonique $\mathcal{B}_c$. En général, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, comme le montre l'Exemple 1.

Définition 31.2 – Matrice d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(u_1, \cdots, u_m)$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle matrice de $(u_1, \cdots, u_m)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ième colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$, c'est-à-dire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_m) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_m)$ est le i-ième coefficient de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$. C'est donc l'unique scalaire $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tel que

$$u_j = (\cdots)e_1 + \ldots + \quad a_{ij}e_i \quad + \ldots + (\cdots)e_n$$

Exemple 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (2,3,4)$, $u_2 = (6,4,7)$. La matrice de la famille (u_1, u_2) dans la base $\mathcal{B} = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ est :

1.2 Matrice d'une application linéaire (quelconque)

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, on peut noter $f(\mathcal{B})$ la famille :

$$f(\mathcal{B}) := (f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Définition 31.3 – Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de la famille $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, notée

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1)) & \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_2)) & \cdots & \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\ldots\ldots}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Remarque. Représentation mnémotechnique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f) = \begin{array}{cc} & f(\mathcal{B}_E) \\ \mathcal{B}_F & \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \end{array}$$

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ a autant de lignes que le cardinal de $\mathcal{B}_F$, ici p.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ a autant de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}_E$ ou de $f(\mathcal{B}_E)$, ici n.

En particulier, avec une application linéaire $\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}$, sa matrice dans des bases quelconques est une matrice de $\boxed{}$.

Méthode – Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$

Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$, il faut, pour chaque vecteur e_j de $\mathcal{B}_E$, déterminer les coordonnées de $f(e_j)$ selon la base $\mathcal{B}_F$. On reporte ensuite ces coordonées dans la j-ième colonne de la matrice.

- Si $\mathcal{B}_F$ est la base canonique de F, trouver les coordonnées de $f(e_j)$ est très simple.
- Sinon, on évite en général de calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$ directement et on passe par un changement de base (vu plus tard dans ce chapitre).

Exemple 5. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+5y+2z \\ -x+4z \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}(f)$, où $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 6. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ définie par par $f(x,y) = \begin{pmatrix} ix \\ -x+iy \\ (i+3)y \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}(f)$, avec $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right)$ (qui est une base de $\mathbb{C}^2$) et $\mathcal{B}_c$ la base canonique (de $\mathbb{C}^3$).

1.3 Calculer avec des morphismes, c'est calculer avec des matrices !

Dans les sections précédentes, on a défini (à bases fixées) la matrice d'un vecteur x, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, et la matrice d'une application linéaire f, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f)$. L'utilité principale de ces matrices est de reformuler tout calcul avec des morphismes en un calcul de matrice.

Théorème 31.4

Soit $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F$) une base de E (resp. F). L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme** d'e.v.

Remarque. L'application Φ dépend du choix des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Preuve partielle du Théorème 31.4. On ne démontrera pas que Φ est linéaire. Montrons que Φ est bijective.

$\square$

Corollaire 31.5

Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a (avec "Mat" au lieu de ${\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}$ par souci de lisibilité) :

$$\mathrm{Mat}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Mat}(f) + \beta \mathrm{Mat}(g)$$

$$\mathrm{Mat}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Mat}(f)$$

$$\mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(g) \iff f = g$$

Théorème 31.6 – Matrice de $f(x)$, de $g \circ f$

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, G. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Soit $x \in E$.

- Matrice de $f(x)$:

- Matrice de $g \circ f$:

Théorème 31.7 – Matrice de f^{-1}

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est inversible.
2. Il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que ${\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(f)$ soit inversible.
3. Pour toute base $\mathcal{B}_E$ de E et pour toute base $\mathcal{B}_F$ de F, la matrice ${\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible.

De plus lorsque ces assertions sont vérifiées, on a :

Exemple 7. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques. En déduire que f est inversible et déterminer sa matrice. En déduire le polynôme qui est égal à $f^{-1}(x)$ avec $x = (0,0,1)$.

1.4 Matrice d'un endomorphisme

Pour obtenir la matrice d'un endomorphisme $f : E \to E$, il faudrait techniquement se donner une base $\mathcal{B}_E$ et une autre base $\mathcal{B}'_E$... En pratique, on prendra systématiquement la même base.

Définition 31.8 – Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Notation. Comme il s'agit de la même base au départ et à l'arrivée, on notera en fait

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}(f)$$

Remarque. Représentation mnémotechnique :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \mathcal{B} \end{array} \begin{array}{c} f(\mathcal{B}) \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ possède toujours autant de lignes et de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}$, ici n, donc c'est une matrice de $\mathcal{M}_{\boxed{n}}(\mathbb{K})$.

Ne pas confondre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice d'un endomorphisme, avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, la matrice d'un vecteur. Dans les deux cas on n'écrit qu'une base, mais la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice carrée, tandis que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est une matrice colonne.

Exemple 8. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, la matrice de id_E dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. Les Théorèmes de la section précédente sont tous valides pour les endomorphismes, en prenant $E = F = G$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_G$. En particulier, on peut utiliser la formule sur la matrice de $g \circ f$ pour en déduire la matrice de $f^k = \underbrace{f \times \ldots \times f}_{k \text{ fois}}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$:

Théorème 31.9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f est un projecteur si et seulement si sa matrice A dans une base quelconque vérifie $A^2 = A$.
- f est une symétrie si et seulement si sa matrice A dans une base quelconque vérifie $A^2 = I_n$.

Démonstration. f étant linéaire, cela découle du fait que f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$ et f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$. $\square$

Exemple 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z,\ 2x - y,\ x)$$

Calculer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$. En utilisant cette matrice, montrer que f n'est pas une symétrie, mais que f^2 en est une.

2 Changements de base

On a vu aux Exemples 1 et 5 qu'il n'est pas facile d'écrire la matrice d'un vecteur ou d'une application linéaire lorsque la base d'arrivée n'est pas canonique : on est souvent amené à résoudre plusieurs systèmes linéaires, ce qui est fastidieux. On va voir ici une méthode qui réduira le problème à un simple produit matriciel.

2.1 Matrices de passage

Définition 31.10

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice notée

$$P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = \begin{array}{c c} & \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$, on a donc $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$. Une matrice de passage est toujours carrée. Puisque $n = \dim E$, on a $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ne pas confondre la matrice $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ avec la matrice $P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$, où les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont échangés ! La matrice de passage **de** $\mathcal{B}$ **vers** $\mathcal{B}'$ est la matrice avec $\mathcal{B}$ à gauche puis $\mathcal{B}'$ en haut... ce qui est *contre-intuitif* car $\mathcal{B}'$ est la **base de départ** tandis que $\mathcal{B}$ est la **base d'arrivée**.

Remarque. La matrice de passage d'une base canonique $\mathcal{B}_c$ à une base quelconque $\mathcal{B}$, càd $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ est très facile à calculer : comme la base $\mathcal{B}_c$ est "à l'arrivée", il suffit de reporter en colonne les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemple 10. On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

Théorème 31.11

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est toujours inversible et

$$\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration.

$\square$

Exemple 11. (suite de l'exemple précédent) Calculer $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$.

2.2 Changements de base

Théorème 31.12 – Changement de base pour un vecteur

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Dit autrement, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \quad X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x), \quad$ et $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$, alors $X = PX'$.

Autrement dit, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$... à celles dans $\mathcal{B}$ (!). La terminologie est très, très *contre-intuitive*, attention à ne pas se tromper !

Exemple 12. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (1,-1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les coordonnées de x selon la base $\mathcal{B}$.

Théorème 31.13 – Changement de bases pour un morphisme

Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(f), \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}, \quad Q = P_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{C}}$, cette relation se réécrit

$$A' = QAP$$

Théorème 31.14 – Changement de base pour un endomorphisme

Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f), \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$, cette relation se réécrit

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 13. On considère $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$, et $\quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x-6y+3z \\ 4x-7y-4z \\ 4x-8y+5z \end{pmatrix}$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$, puis $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En déduire que f est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques, ainsi qu'une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

3 Morphisme canoniquement associé à une matrice

3.1 Définition

En section précédente, on a vu que, en fixant $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et de F, l'application $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme (avec $n = \dim E$ et $p = \dim F$).
En particulier, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe un unique morphisme $f_A \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\Phi(f_A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f_A) = A$.
Cependant, le morphisme f_A est unique à condition d'avoir fixé $E, F, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Afin de définir cet objet de manière unique, on prendra $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$ munis de leurs bases canoniques.

Définition 31.15

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle morphisme canoniquement associé à A l'unique application linéaire $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(f_A)$$

où $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ sont les bases **canoniques** respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. *(notation non officielle pour $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p$)*

Remarque (Calcul de $f_A(x)$)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ son morphisme canoniquement associé. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a vu que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(f_A(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(f_A)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(x) = A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(x)$$

Cependant, les bases étant canoniques, on peut identifier x et $f_A(x)$ avec leurs matrices respectives selon la base canoniques. On peut donc écrire, avec $x \overset{\text{id.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$f_A(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, f_A est l'application qui à un vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ associe le vecteur $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^p$.

Exemple 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Alors le morphisme canoniquement associé à A est le morphisme $f_A : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$ défini par :

3.2 Noyau et image d'une matrice

Définition 31.16

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ son morphisme associé. On définit

- Le noyau de A par $\operatorname{Ker} A := \operatorname{Ker}(f_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n \overset{\text{id.}}{=} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
- L'image de A par $\operatorname{Im} A := \operatorname{Im}(f_A)$ (c'est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p \overset{\text{id.}}{=} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$).

Comme pour toute matrice colonne $X \in \mathbb{K}^n$, on a $f_A(X) = AX$, on en déduit que :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; AX = 0_{\mathbb{K}^p} \right\}$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathbb{K}^n \right\} = \left\{ Y \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; \exists X \in \mathbb{K}^n \quad Y = AX \right\}$$

Pour déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$, on peut donc se passer de f_A grâce aux écritures ci-dessus. De plus, en notant $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ et pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$, on a :

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases}$$

$$\iff \left(\begin{array}{c|c} & y_1 \\ A & \vdots \\ & y_p \end{array} \right) \qquad \text{(matrice augmentée d'inconnues } x_1, \cdots, x_n\text{)}$$

Ainsi, on peut rester dans l'univers des matrices, grâce aux caractérisations suivantes :

Théorème 31.17 – Caractérisations de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \iff (x_1, \cdots, x_n) \text{ est solution de } \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A \iff \text{le système suivant est compatible : } \left(\begin{array}{c|c} & y_1 \\ A & \vdots \\ & y_p \end{array} \right)$$

Pour déterminer $\operatorname{Ker} A$, il suffit donc de résoudre le système en matrice augmentée ci-dessus (on peut ne faire apparaitre les inconnues $x_1, \cdots, x_n$ que tout à la fin). Pour déterminer $\operatorname{Im} A$, il suffit de trouver d'éventuelles équations de compatibilité à vérifier sur $y_1, \cdots, y_p$.

Théorème 31.18 – ImA sous forme de Vect

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ qui constituent les **colonnes** de A. On a alors

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \cdots, C_n)$$

Démonstration. On note f_A le morphisme canoniquement associé, et on note $\mathcal{B}_n = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_p = (e'_1, \cdots, e'_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(f_A) = A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f_A(e_1) & f_A(e_2) & \cdots & f_A(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Exemple 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 4 & -7 & 4 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, dont le morphisme canoniquement associé est celui de l'Exemple 13.
Déterminer une base de ImA.

4 Matrices équivalentes et rang d'une matrice

4.1 Définition du rang d'une matrice

Définition 31.19

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On définit le rang de A par

$$\operatorname{rg} A := \dim(\operatorname{Im} A)$$

En particulier, avec f_A le morphisme canoniquement associé à A, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f_A)$. Comme $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, on a en particulier

$$\mathrm{rg}\, A \leq \min(n, p)$$

Théorème 31.20

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A : $\quad \mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_n)$.

Démonstration. Cela découle trivialement du Théorème 31.18. □

Définition 31.21

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n, p)$, on pose

$$J_r := \qquad r \text{ lignes} \left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r \text{ colonnes}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right. \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

Lemme 31.22

La matrice J_r est de rang r.

Démonstration. Si on note $C_1, \cdots, C_r$ les r premières colonnes de J_r, on remarque que

$$\mathrm{Im}\, J_r = \mathrm{Vect}\left(C_1, \cdots, C_r, 0_{n,1}, \cdots, 0_{n,1}\right) = \mathrm{Vect}\left(C_1, \cdots, C_r\right)$$

La famille $(C_1, \cdots, C_r)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ engendre donc $\mathrm{Im}\, J_r$, et c'est clairement une famille libre (puiqu'on obtient cette famille par extraction des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$). Donc c'est une base de $\mathrm{Im}\, J_r$, qui est donc de dimension r. D'où $\mathrm{rg}\, J_r = r$. □

4.2 Opérations élémentaires

On a vu que les opérations élémentaires étaient de trois types : dilatation, permutation, transvection. Dans les trois définitions qui suivent, on donne la forme générale d'une matrice de dilatation, d'une matrice de permutation , d'une matrice de transvection dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 31.23 – Forme d'une matrice de DILATATION dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$D_i(\mu) := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \end{array} \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{K}^*$$

On peut vérifier que $D_i(\mu)$ est inversible avec $\quad D_i(\mu)^{-1} = D_i\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$.

Définition 31.24 – Forme d'une matrice de PERMUTATION dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$P_{i,j} := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \qquad\qquad \text{col. } j \end{array} \qquad \text{avec } i \neq j$$

On peut vérifier que $P_{i,j}$ est inversible avec $\quad (P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$.

Définition 31.25 – Forme d'une matrice de TRANSVECTION dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$T_{i,j}(\lambda) := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \qquad \text{col. } j \end{array} \qquad \text{avec } i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

On peut vérifier que $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible avec $\quad T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Lemme 31.26 – Op. élémentaires et matrices équivalentes

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Une opération élémentaire sur les **lignes** de A revient à multiplier A **à gauche** par une matrice :

Op. élém. sur A	Écriture matricielle
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$D_i(\mu) \times A$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$P_{i,j} \times A$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{i,j}(\lambda) \times A$

Une opération élémentaire sur les **colonnes** de A revient à multiplier A **à droite** par une matrice :

Op. élém. sur A	Écriture matricielle
$C_i \leftarrow \mu C_i$	$A \times D_i(\mu)$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A \times P_{i,j}$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$A \times T_{i,j}(\lambda)$

En particulier, comme les matrices $D_i(\mu)$, $P_{i,j}$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont toutes inversibles, chacune de ces opérations est “réversible” : il suffit de multiplier par l'inverse de la matrice correspondante pour annuler l'opération.

4.3 Matrices équivalentes

Définition 31.27 – Matrices équivalentes

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_{\dots}(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_{\dots}(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = QAP$$

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, A' deux matrices qui représentent f dans des bases différentes (par exemple $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(f)$). Alors A et A' sont équivalentes, cf Théorème 31.13.

Théorème 31.28

La relation “est équivalente à” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

On pourra en particulier dire que deux matrices sont équivalentes si l'une est équivalente à l'autre.

Théorème 31.29

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Si B est une matrice obtenue à partir d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A, alors les matrices A et B sont équivalentes.

Démonstration. Supposons que B soit obtenue à partir de A en ayant fait :

- r opérations sur les lignes dont on note $Q_1, \cdots, Q_r$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°r).
- s opérations sur les colonnes dont on note $P_1, \cdots, P_s$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°s).

Alors

$$B = Q_r \cdots Q_1 A L_1 \cdots L_s$$

En posant $Q = Q_r \cdots Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = P_1 \cdots P_s \in GL_n(\mathbb{K})$, on a donc $B = QAP$. D'où A et B sont équivalentes. □

4.4 Lien entre matrices équivalentes et rang

Lemme 31.30

Si deux matrices sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

Démonstration.

Soit $A', A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors

$$A' = QAP$$

et donc, en notant $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, en notant q, f, p les endomorphismes canoniquement associés à Q, A, P respectivement,

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(q \circ f \circ p)$$

Or, comme Q et P sont inversibles, q et p aussi. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, A' &= \mathrm{rg}(q \circ f \circ p) && \text{par définition du rang de } A' \\ &= \mathrm{rg}\, f && \text{car } q \text{ et } p \text{ sont des isomorphismes} \\ &= \mathrm{rg}\, A \end{aligned}$$

où, pour la deuxième égalité, on a utilisé le Théorème 29.30 du chapitre 29 (Applications linéaires, partie A).

□

Théorème 31.31

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors A est équivalente à J_r.
En particulier, étant donné $f \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(f) = J_r$.

Idée générale de la preuve. On va montrer qu'il existe $r' \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ tel que $J_{r'}$ et A sont équivalentes. Alors, par le Lemme 31.30, cela signifie que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, J_{r'}$. Comme $\mathrm{rg}\, A = r$ et $\mathrm{rg}\, J_{r'} = r'$, on en déduit alors que $r = r'$, donc que A est équivalente à r'.
Pour montrer que A est équivalente à une matrice $J_{r'}$, on utilise le Théorème 31.29 : A est équivalente à toute matrice obtenue par des opérations élémentaires sur *les lignes et/ou les colonnes*. Par opérations sur les lignes on peut mettre la matrice A sous forme échelonnée réduite et mettre tous ses pivots à 1. Par permutation de colonnes, on peut disposer tous les pivots le long de la "diagonale". Ainsi A est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & \boxed{1} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Ensuite, on peut faire des opérations sur les colonnes pour éliminer les étoiles restantes. On arrive donc à une matrice de la forme $J_{r'}$ avec $0 \le r' \le \min(n,p)$. On conclut comme indiqué au début de la preuve. □

Corollaire 31.32

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont équivalentes, si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.

Démonstration. Sens direct : cela découle du Lemme 31.30. Sens réciproque : si $r = \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$, alors par ce qui précède A et B sont toutes deux équivalentes à J_r, donc A et B sont équivalentes par transitivité. □

4.5 Calcul pratique du rang

Théorème 31.33

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à celui de sa transposée : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration. Soit $r = \operatorname{rg} A$. Alors A est équivalente à une matrice $J_r \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = QJ_rP$$

En passant à la transposée, on obtient

$$A^\top = P^\top J_r^\top Q^\top$$

Comme P et Q sont inversibles, les matrices $P^\top$ et $Q^\top$aussi. Ainsi, $A^\top$ est équivalente à $J_r^\top$. Or, on voit facilement que $\operatorname{rg} J_r^\top = r$ ($J_r^\top$ est une matrice de la même forme que J_r mais dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). Par équivalence de matrices, $\operatorname{rg} A^\top = \operatorname{rg} J_r^\top = r = \operatorname{rg} A$. □

Corollaire 31.34

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $L_1, \cdots, L_p$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & L_1 & \cdots \\ \cdots & L_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & L_p & \cdots \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à la dimension du s.e.v. engendré par les colonnes de A : $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_p)$.

Démonstration.

□

On a vu au Théorème 31.29 que les opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes conservent le rang. Pour calculer le rang de A, on va donc se ramener à une matrice plus simple dont on peut ensuite facilement déterminer le rang.

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut :

- Échelonner A : le rang de A est alors égal au nombre de pivots.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg} A = r$ (cf Théorème 31.20).
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg} A = r$ (cf Corollaire 31.34).

Exemple 16. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer (en fonction de a et b) le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

5 Matrices semblables et trace d'une matrice

5.1 Matrices semblables

Définition 31.35 – Matrices semblables

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A' est semblables à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

La notion de matrices semblables ne concerne que les matrices **carrées**. Par contre, la notion de matrices équivalentes concerne des matrices rectangulaires de toute taille.

On aurait pu intervertir P et P^{-1} dans la définition ci-dessus. En effet, A et A' sont semblables si et seulement s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = QAQ^{-1}$: il suffit en effet de poser $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A, A' deux matrices qui représentent f dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ différentes (i.e. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$). Alors A et A' sont semblables, cf Théorème 31.14.

Exemple 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice semblable à λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $A = \lambda I_n$.

Théorème 31.36

Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. En particulier, elles ont le même rang.

La réciproque est fausse : les matrices $2I_n$ et I_n ont le même rang, donc sont équivalentes, mais pourtant elles ne sont pas semblables par l'exemple qui précède.

Théorème 31.37

La relation "être semblable à" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2 Trace d'une matrice

Définition 31.38 – Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A comme étant la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr} A := A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn} \quad \in \mathbb{K}$$

Cette notion n'a de sens que pour des matrices carrées !

Exemple 18. $\mathrm{Tr}\, I_n = \ldots\ldots$ et $\mathrm{Tr}\, E_{ij} = \ldots\ldots.$

Théorème 31.39

L'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Démonstration. Cela vient du fait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[\lambda A + \mu B]_{ii} = \lambda A_{ii} + \mu B_{ii}$ □

Théorème 31.40

Bien que A et B ne soient pas nécessairement carrées, les matrices AB et BA le sont, et donc calculer leur trace a un sens.

Démonstration.

□

Théorème 31.41

Si A et B sont semblables, alors $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$.

Démonstration.

□

En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que A, A' sont deux matrices qui représentent f dans des bases différentes, alors on a vu que A, A' sont semblables et donc $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A'$. Cela permet de justifier la définition suivante.

Définition 31.42

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. La valeur de $\operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base de E. On définit ainsi la trace de f comme étant

$$\operatorname{Tr}(f) := \operatorname{Tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \quad \in \mathbb{K}$$

(la valeur de $\operatorname{Tr}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie).

Théorème 31.43

(On suppose E de dimension finie). Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors

$$\operatorname{Tr} p = \operatorname{rg} p$$

Démonstration.

□

Exemple 19. On reprend l'Exemple 13. On avait vu que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -6 & -7 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

et que f était un projecteur. On a alors

$$\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)\right) = 4 - 7 + 5 = 2$$

Donc f est de rang 2 : c'est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension 2 (donc parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ de dimension 1 par le théorème du rang). Cela correspond bien à ce qu'on a trouvé à l'Exemple 15

6 Méthodes pour les exercices

On rappelle que E et F sont supposés être de dimension finie.

Méthode

Pour déterminer si un morphisme $f : E \to F$ est inversible et calculer f^{-1}, on peut :

1. Écrire sa matrice dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ quelconques, idéalement canoniques.
2. Montrer que cette matrice est inversible. On peut ainsi en déduire la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
3. Ceci permet de déterminer f^{-1} (et ce d'autant plus facilement si $\mathcal{B}_E$ et/ou $\mathcal{B}_F$ est canonique)

Méthode – Changement de base

Pour calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sachant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, il faut :

1. Calculer une matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ (l'une d'elles est très simple si $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$ est canonique).
2. Déterminer l'autre matrice de passage en calculant l'inverse de la première.
3. Calculer le produit de trois matrices $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ pour en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut

- Échelonner A : le rang de A est alors égal au nombre de pivots.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg}\, A = r$.
- Faire des opérations sur les lignes et/ou colonnes, pour reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\mathrm{rg}\, A = r$.